BBMerlion

Binomial Distribution

Dyah Adila

Binomial Distribution adalah bentuk percobaan yang memiliki syarat-syarat sebagai berikut:

1. Percobaan dilakukan sebanyak **n** kali.
2. Setiap percobaan memiliki dua hasil yang mungkin, yaitu: berhasil dan gagal.
3. Kemungkinan berhasil (**p**) dan kemungkinan gagal (**q**) adalah konstan dalam setiap percobaan.
4. Setiap percobaan merupakan ***independent event*** (Hasil satu percobaan tidak terpengaruh oleh percobaan lain).

Notasi

Binomial Distribution dinotasikan sebagai berikut:

$$X \sim B(n,p)$$

- X: Percobaan
- n: Jumlah percobaan
- p: Kemungkinan berhasil

Formula

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k 1 - p^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Contoh Soal

Di kebun durian, ditemukan bahwa 5% dari durian yang dihasilkan ditolak karena hambar. Berapa probabilitas bahwa sampel 12 durian berisi:

(a) tepat 2, (b) tidak lebih dari 2, (c) setidaknya 2 ditolak?

Solusi

Misal **X = Jumlah durian yang ditolak**.

Persenan durian yang ditolak = 5% = 0.05

X ~ B(12, 0.05)

Masukan kedalam formula:

$$\mathbf{P\ (X = k) = \binom{12}{k} 0.05^{k} (1 - 0.05)^{12-k}}$$

a) P (X = 2) = $\binom{12}{2} 0.05^{2} (1 - 0.05)^{10}$ = 0.099

b) P (X $\leq$ 2) = P (X = 0) + P (X = 1) + P (X = 2) = 0.54 + 0.341 + 0.099 = 0.98

c) P (X$\geq$ 2) = 1 – P (X < 2) = 1 – (P (X = 0) + P (X = 1)) = 0.119

BBMerlion

Poisson Distribution

Poisson Distribution

- ***<u>Poisson Distribution</u>*** adalah jenis distribusi yang berguna dalam menggambarkan jumlah peristiwa yang akan terjadi dalam jangka waktu tertentu, jarak atau ruang.
- Contoh peristiwa yang dapat dimodelkan oleh Poisson :

1. Jumlah panggilan telepon yang diterima oleh switchboard selama periode waktu tertentu.
2. Jumlah pelanggan memasuki bank selama waktu makan siang.
3. Jumlah dari kerusakan mesin selama hari tertentu.

Formula

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

- λ : Probabilitas terjadi nya peristiwa
- e: Bilangan natural (natural number)

Contoh Soal

Jumlah pelanggan yang mampir ke sebuah toko dalam waktu 1 jam dapan di representasikan dengan Poisson Ditribution dengan rata-rata pelanggan yang mampir dalam waktu 1 jam = 2.

a) Berapa probabilitas tidak ada pelanggan yang mampir ke toko tersebut dalam waktu 1 jam?

b) Berapa probabilitas paling banyak 1 pelanggan yang mampir ke toko tersebut dalam waktu 1 jam?

Solusi

a) $P\ (X = 0) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0!} = 0.135$

b) $P\ (X \leq 1) = P\ (X = 0) + P\ (X = 1) = 0.406$

BBMerlion

Normal Distribution

Notasi

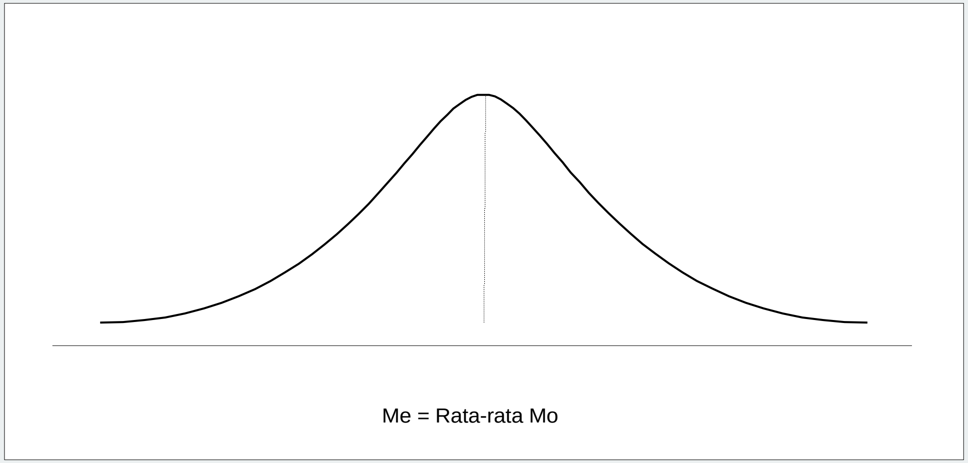
$$N \sim (\mu,\sigma^2)$$

- μ = Rata-rata
- σ^2 = Simpangan baku

Ciri – Ciri

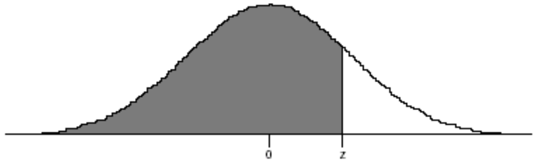
- Curve normal berbentuk lonceng, nilai median, rata-rata dan modus sama besar.
- Distribusi normal adalah simetris dengan rata-rata hitungnya x =μ.
- Kurva normal menurun ke bawah ke dua arah yang berlawanan dari nilai tengahnya. Disebut asimptotis karena kurva semakin mendekati sumbu x tetapi tidak pernah menyentuh sumbu x.
- Grafiknya mendekati sumbu x dimulai dari ke kanan dan ke kiri.
- Luas daerah grafik selalu sama dengan 1 unit persegi.

Gambar distribusi normal



- Kurva dibagi menjadi dua dengan luas yang sama besar.
- Jika simpangan bakunya makin besar maka kurvanya makin rendah dan jika simpangan bakunya makin kecil maka kurvanya makin tinggi

Tabel Distribusi Normal



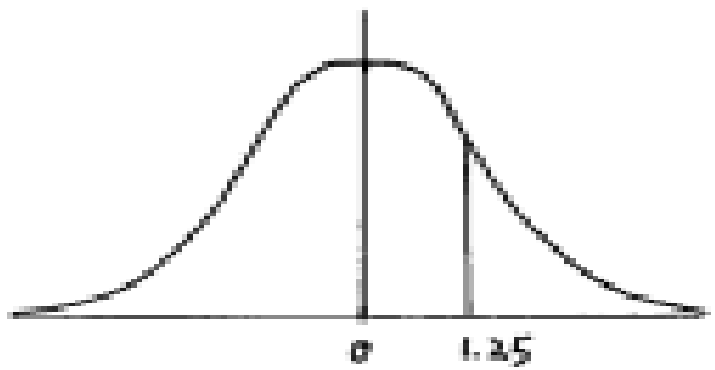
Normal Deviate z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-4.0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.7	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
-3.6	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
-3.5	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483

Contoh Soal

a) Temukan P(Z≤ 1.25)

$$P(Z\leq 1.25) = \varphi(1.25) = 0.8944.$$

$$P(Z \leq 1.25) = \phi(1.25) = 0.8944.$$

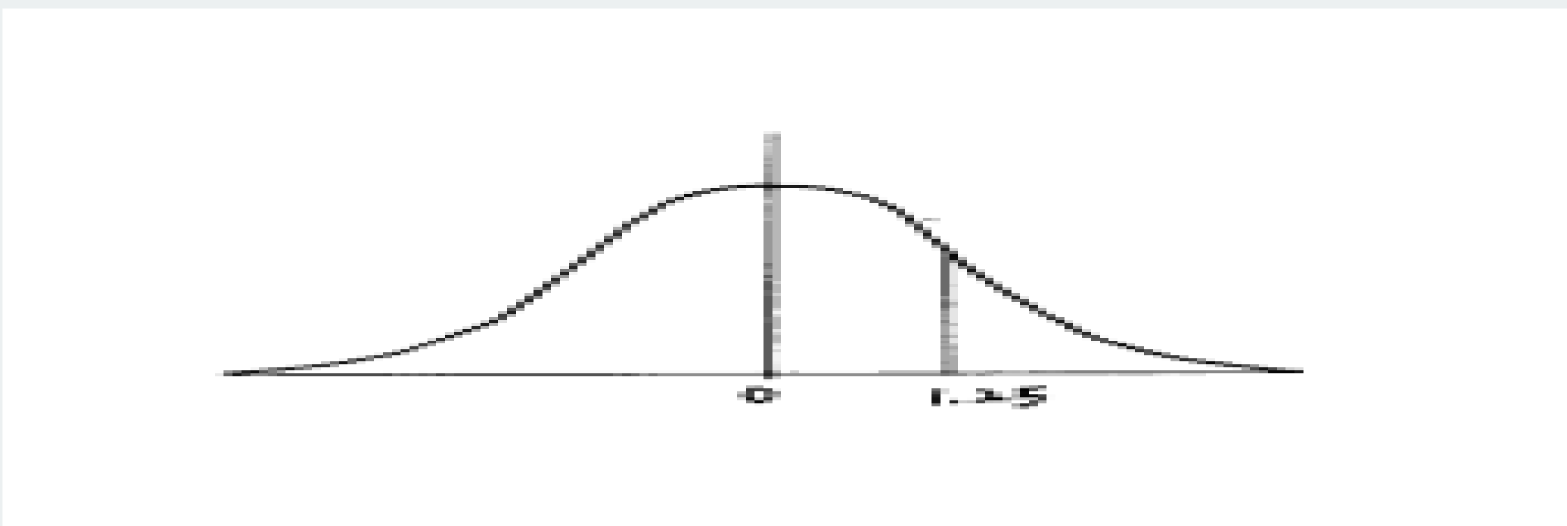


Contoh Soal

b) Temukan $P(Z > 1.25)$

$$P(Z > 1.25) = 1 - P(Z \leq 1.25) = 1 - \varphi(1.25)$$

$$= 1 - 0.8944 = 0.1056.$$



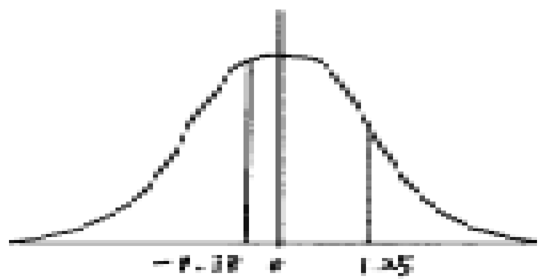
Contoh Soal

c) $P(-0.38 \leq Z \leq 1.25)$:

Area dibawah kurva antara - 0.38 sampai 1.35

$P(-0.38 \leq Z \leq 1.25)$

$= \varphi(1.25) - \varphi(-0.38) = 0.8944 - 0.352 = 0.5424.$



$$
\begin{aligned}
P(-0.38 \leq Z \leq 1.25) &= \phi(1.25) - \phi(-0.38) \\
&= 0.8944 - 0.352 = 0.5424.
\end{aligned}
$$

Contoh Soal

Sebuah merk baterai dapat bertahan selama rata-rata 3 minggu. Dengan simpangan baku 0.5 minggu.

a) Berapa kemungkinan baterai akan bertahan selama kurang dari 2.3 minggu?

b) Misalkan setidaknya 80% dari baterai akan bertahan setidaknya α minggu. Cari kemungkinan terbesar α.

Solusi

a) Misal X = battery life.

$X \sim N(3, 0.52)$.

$P(X < 2.3) = P(Z < \frac{2.3-3}{0.52}) \quad = P(Z < -1.4)$

$= \varphi(-1.4) = 0.0808$

b) $P(X \geq \alpha) = P(Z \geq \frac{\alpha - 3}{0.52})$

$= 1 - P(Z \leq \frac{\alpha - 3}{0.52}) = 1 - \varphi\,(\frac{\alpha - 3}{0.52}) \geq 0.8$

$\Rightarrow \varphi(\frac{\alpha - 3}{0.52}) \leq 0.2$

$\alpha = 2.575$weeks.

Pendekatan Poisson Terhadap Distribusi Binomial

Poisson Distribution dapat digunakan sebagai aproksimasi untuk Binomial Distribution dengan persyaratan:

1. n besar dan p kecil
2. $\lambda = n \times p$
3. $\lambda \leq 7$

Contoh Soal

Misalkan ada sebuah sistem komunikasi digital yang mentransmisikan angka 0 dan 1. Kemungkinan terjadinya error (misal, 0 di transmisikan sebagai 1 atau sebaliknya), adalah 0.001. Berapa probabilitas terjadinya 3 error dalam transmisi 5000 bit? (1 bit: 0 atau 1)

Solusi

Misal X = jumlah kesalahan pada 5000 transmisi.

- n x p = 5000 x 0.001 = 5 < 7
- Gunakan Pendekatan poisson untuk mengaproksimasi binomial dengan λ = 5
- P (X = 3) = $\frac{e^{-5}5^{3}}{3!}$ = 0.14037.
- Jika menggunakan binomial:

  P (X = 3) = $\binom{500}{3}(0.001)^{3}(1-0.001)^{500-3} = 0.14036.$

Pendekatan Normal Distribution Terhadap Binomial Distribution

- Probabilitas binomial menjadi semakin sulit untuk dihitung ketika n semakin besar. Namun, ada cara untuk memperkirakan binomial distribusi dengan cara normal distribusi ketika perhitungan binomial distribution tidak praktis.
- Untuk menggunakan pendekatan normal terhadap binomial distribution, interval ±0.5 harus digunakan. Karena Binomial Distribution adalah *discrete* dan Normal distribution *continuous.* Disebut juga *continuity correction factor.*

Syarat

- $np \geq 5$
- $(1-p) \geq 5$
- $X \sim B(n, p)$ dengan $np \geq 5$ dan $n(1-p) \geq 5$

  $\Rightarrow X \sim N(np, np(1-p))$.

Continuity Correction Factor.

- $Pb(X=k) \approx Pn(k-0.5 \leq X \leq k+0.5)$
- $Pb(a \leq X \leq b) \approx Pn(a-0.5 \leq X \leq b+0.5)$
- $Pb(X \leq b) \approx Pn(X \leq b+0.5)$
- $Pb(X \geq a) \approx Pn(X \geq a-0.5)$
- $Pb(X<b) = Pb(X \leq b-1) \approx Pn(X \leq b-1+0.5)$
- $Pb(X>a) = Pb(X \geq a+1) \approx Pn(X \geq a+1-0.5)$

Contoh Soal

Sebuah koin dilempar 100 kali. Cari probabilitas bahwa ekor terjadi (a) tepat 60 kali, (b) antara 48 dan 53 kali inklusif

Solusi

- X=the no. of tails in 100 tosses.
- $\mu = np = 50$
- $\sigma = np(1-p) = 5$.
- $X \sim N(50,52)$.

a) $P_b\,(X = 60) \approx P_n\,(60-0.5 \le X \le 60 + 0.5)$

$= P_n(59.5 \le X \le 60.5)$

$[X \sim N(50,52)] = P_n\left(\frac{59.5-50}{5} \le Z \le \frac{60.5-50}{5}\right)$

$= P_n\,(1.9 \le Z \le 2.1)$

$= \varphi\,(2.1) - \varphi\,(1.9) = 0.9821 - 0.9713$

$= 0.0108$

Solusi

b) Pb(48≤X≤53)≈Pn(48−0.5≤X≤53+0.5)

=Pn(47.5≤X≤53.5)

[X~N(50,52)]=Pn($\frac{47.5-50}{5} \leq Z \leq \frac{53.5-50}{5}$)

Ans: 0.4495